

Algèbres de Hopf des permutahédres, associahédres et hypercubes

Frédéric Chapoton

*Institut de Mathématiques, Université Pierre et Marie Curie, 4, Place Jussieu,
75005 Paris, France*

E-mail: chapoton@math.jussieu.fr

Received March 8, 1999; accepted August 3, 1999

Three graded Hopf algebras over \mathbb{Z} are constructed, each one having in degree n a basis indexed by the faces of a polytope of dimension $n - 1$, respectively, the

[View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk](#)

INTRODUCTION

On définit trois algèbres de Hopf graduées emboîtées, dont les \mathbb{Z} -modules libres gradués sous-jacents ont en degré n des bases indexées respectivement par les cellules du $n^{\text{ème}}$ permutahédre, les cellules du $n^{\text{ème}}$ associahédre et celles de l'hypercube de dimension $n - 1$. Ces trois algèbres de Hopf sont munies de plus d'une filtration décroissante par la dimension des cellules. En considérant les trois algèbres de Hopf graduées emboîtées obtenues comme quotient par les éléments de filtration au moins 1, dont les \mathbb{Z} -modules libres gradués sous-jacents ont en degré n des bases indexées respectivement par les sommets du $n^{\text{ème}}$ permutahédre, les sommets du $n^{\text{ème}}$ associahédre et ceux de l'hypercube de dimension $n - 1$, on retrouve les constructions de Malvenuto et Reutenauer pour les deux extrêmes et l'algèbre des arbres binaires plans de Loday et Ronco pour celle du milieu.

1. ALGÈBRE DE HOPF DES PERMUTAHÈDRES

Soient $n \geq 1$ et $1 \leq d \leq n$. On note $\text{Perm}(n, d)$ l'ensemble des partitions ordonnées de $\{1, \dots, n\}$ en d parts. Il existe un polytope P_n de dimension $n - 1$ appelé permutahédre tel que $\text{Perm}(n, d)$ soit en bijection avec les faces de dimension $n - d$ de P_n (cf. [3]). On peut aussi décrire $\text{Perm}(n, d)$ comme l'ensemble des applications surjectives de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, d\}$.

Une telle application peut se représenter par un diagramme comme celui de gauche de la Fig. 1. On convient que $\text{Perm}(0, 0) = \{|\}$ et on note $\text{Perm}(n)$ l'union disjointe des ensemble $\text{Perm}(n, d)$ pour $n \geq 0$ fixé.

Si S est un ensemble, on note $\mathbb{Z}[S]$ le \mathbb{Z} -module libre de base S . On pose

$$\text{Perm} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{Z}[\text{Perm}(n)],$$

ce qui définit une graduation de Perm par n .

On définit une filtration décroissante sur Perm par $\text{Perm}^{\geq 0} = \text{Perm}$ et, pour $r \geq 1$, $\text{Perm}^{\geq r} = \bigoplus_{n \geq 1} \bigoplus_{d=1}^{n-r} \mathbb{Z}[\text{Perm}(n, d)]$. On en déduit une filtration de $\text{Perm} \otimes \text{Perm}$ définie par $(\text{Perm} \otimes \text{Perm})^{\geq r} = \bigoplus_{p+q=r} \text{Perm}^{\geq p} \otimes \text{Perm}^{\geq q}$.

On munit Perm d'une structure de bigèbre graduée $(\text{Perm}, *, \Delta)$ comme suit.

On désigne par $[n]$ l'ensemble ordonné $\{1, \dots, n\}$ pour tout entier $n \geq 1$, et l'on note $[0]$ l'ensemble vide et $[n_1] \sqcup [n_2]$ l'union disjointe de $[n_1]$ et $[n_2]$ munie de l'ordre qui place $[n_1]$ avant $[n_2]$. On identifie $[n_1] \sqcup [n_2]$ avec $[n_1 + n_2]$ par l'unique bijection croissante. Plus généralement, on identifie tout ensemble ordonné S à $[\#S]$.

Soient f_1, f_2 des applications surjectives de $[n_1]$ dans $[d_1]$ et de $[n_2]$ dans $[d_2]$ respectivement. Alors on définit leur produit:

$$f_1 * f_2 = \sum_{d=\max(d_1, d_2)}^{d_1+d_2} \sum_{i_1, i_2} (i_1 f_1) \sqcup (i_2 f_2), \quad (1)$$

où la seconde somme porte sur les injections croissantes $i_1: [d_1] \rightarrow [d]$ et $i_2: [d_2] \rightarrow [d]$ telles que $i_1[d_1] \cup i_2[d_2] = [d]$. C'est un élément de $\mathbb{Z}[\text{Perm}(n_1 + n_2)]$, donc le produit respecte la graduation.

Soit $f: [n] \rightarrow [d]$. Son coproduit est défini par la formule:

$$\Delta(f) = \sum_{[d]=[k] \sqcup [l]} f|_{f^{-1}[k]} \otimes f|_{f^{-1}[l]}, \quad (2)$$

où k et l peuvent être nuls. Il appartient à $\bigoplus_{p+q=n} \mathbb{Z}[\text{Perm}(p)] \otimes \mathbb{Z}[\text{Perm}(q)]$, donc le coproduit respecte la graduation.

PROPOSITION 1. (1) *Perm munie du produit $*$ et du coproduit Δ est une bigèbre graduée. L'élément $|\in \text{Perm}(0, 0)$ est une unité pour $*$. Si on définit $\varepsilon: \text{Perm} \rightarrow \mathbb{Z}$ par $\varepsilon(|) = 1$ et $\varepsilon(\bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{Z}[\text{Perm}(n)]) = 0$, alors ε est une coïunité pour Δ .*

(2) *Perm est une bigèbre filtrée et on retrouve sur $\text{Perm}^{\geq 0}/\text{Perm}^{\geq 1}$ la structure d'algèbre de Hopf définie par Malvenuto et Reutenauer dans [2, Theorem 3.3].*

Preuve. Le produit $*$ est associatif car on a :

$$\begin{aligned} (f_1 * f_2) * f_3 &= \sum_{d=\max(d_1, d_2, d_3)}^{d_1+d_2+d_3} \sum_{i_1, i_2, i_3} (i_1 f_1) \sqcup (i_2 f_2) \sqcup (i_3 f_3) \\ &= f_1 * (f_2 * f_3), \end{aligned} \quad (3)$$

où la seconde somme porte sur les injections croissantes $i_1: [d_1] \rightarrow [d]$, $i_2: [d_2] \rightarrow [d]$ et $i_3: [d_3] \rightarrow [d]$ telles que $i_1[d_1] \cup i_2[d_2] \cup i_3[d_3] = [d]$.

De même, le coproduit Δ est coassociatif car on a :

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes \text{Id}) \Delta(f) &= \sum_{[d]=[k] \sqcup [l] \sqcup [m]} f|_{f^{-1}[k]} \otimes f|_{f^{-1}[l]} \otimes f|_{f^{-1}[m]} \\ &= (\text{Id} \otimes \Delta) \Delta(f). \end{aligned} \quad (4)$$

De plus, le produit $*$ et le coproduit Δ sont compatibles. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \Delta(f_1 * f_2) &= \sum_{d=\max(d_1, d_2)}^{d_1+d_2} \sum_{i_1, i_2} \sum_{[d]=[dk] \sqcup [dl]} i_1 f_1|_{(i_1 f_1)^{-1}[dk]} \sqcup i_2 f_2|_{(i_2 f_2)^{-1}[dk]} \\ &\quad \otimes i_1 f_1|_{(i_1 f_1)^{-1}[dl]} \sqcup i_2 f_2|_{(i_2 f_2)^{-1}[dl]}. \end{aligned}$$

On peut échanger les deux sommations de droite, décomposer $[d_1] = [k_1] \sqcup [l_1]$ et $[d_2] = [k_2] \sqcup [l_2]$ en parties envoyées dans $[dk]$ ou $[dl]$ par i_1 ou i_2 et enfin décomposer les injections i_1 et i_2 en quatre injections $i_1^k, i_1^l, i_2^k, i_2^l$. On obtient :

$$\begin{aligned} \Delta(f_1 * f_2) &= \sum_{d=\max(d_1, d_2)}^{d_1+d_2} \sum_{[d]=[dk] \sqcup [dl], [d_1]=[k_1] \sqcup [l_1], [d_2]=[k_2] \sqcup [l_2]} \\ &\quad \sum_{i_1^k, i_1^l, i_2^k, i_2^l} i_1^k f_1|_{(f_1)^{-1}[k_1]} \sqcup i_2^k f_2|_{(f_2)^{-1}[k_2]} \\ &\quad \otimes i_1^l f_1|_{(f_1)^{-1}[l_1]} \sqcup i_2^l f_2|_{(f_2)^{-1}[l_2]}, \end{aligned}$$

où $i_1^k: [k_1] \rightarrow [dk]$, $i_2^k: [k_2] \rightarrow [dk]$, $i_1^l: [l_1] \rightarrow [dl]$ et $i_2^l: [l_2] \rightarrow [dl]$ sont des injections croissantes telles que $i_1^k[k_1] \cup i_2^k[k_2] = [dk]$ et $i_1^l[l_1] \cup i_2^l[l_2] = [dl]$.

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \Delta(f_1) * \Delta(f_2) &= \sum_{[d_1]=[k_1] \sqcup [l_1]} \sum_{[d_2]=[k_2] \sqcup [l_2]} \sum_{dk=\max(k_1, k_2)}^{k_1+k_2} \\ &\quad \sum_{dl=\max(l_1, l_2)}^{l_1+l_2} \sum_{i_1^k, i_1^l, i_2^k, i_2^l} i_1^k f_1|_{(f_1)^{-1}[k_1]} \sqcup i_2^k f_2|_{(f_2)^{-1}[k_2]} \\ &\quad \otimes i_1^l f_1|_{(f_1)^{-1}[l_1]} \sqcup i_2^l f_2|_{(f_2)^{-1}[l_2]}. \end{aligned}$$

On conclut par comparaison des deux ensemble de sommation. Le fait que $|$ soit une unité et ε une coünité est une conséquence directe des formules pour $*$ et Δ .

Il résulte également des formules que le produit et le coproduit sont des applications filtrées relativement aux filtrations de Perm et $\text{Perm} \otimes \text{Perm}$. Le fait que $\text{Perm}^{\geq 0} / \text{Perm}^{\geq 1}$ soit l'algèbre de Hopf de Malvenuto et Reutenauer vient de ce que le coproduit restreint aux cellules de dimension 0 coïncide avec celui de cette algèbre, et que le produit de cellules de dimension 0 est donné, modulo des termes de filtration au moins 1, par la même somme sur des battages. On renvoie le lecteur à l'article [1, 1.1–1.3] pour plus de détails sur cette algèbre de Hopf sur les groupes symétriques.

2. ALGÈBRE DE HOPF DES ASSOCIAHÈDRES

Soient $n \geq 1$ et $1 \leq d \leq n$. On note $\text{Arb}(n, d)$ l'ensemble des arbres plans à $n+1$ feuilles et d sommets internes, où chaque sommet interne a au moins deux arêtes entrantes. Il existe un polytope K_n de dimension $n-1$ appelé associahèdre tel que $\text{Arb}(n, d)$ soit en bijection avec les faces de dimension $n-d$ de K_n (cf. [3]). On convient que $\text{Arb}(0, 0)$ est un singleton que l'on désigne par $\{|\}$. On note $\text{Arb}(n)$ l'union disjointe des ensembles $\text{Arb}(n, d)$ pour n fixé. On donne un exemple d'arbre dans le dessin du milieu de la Fig. 1.

On a une application surjective $\psi: \text{Perm}(n) \rightarrow \text{Arb}(n)$ définie par récurrence sur n comme suit. Pour $n=0$, $\psi(|) = |$. Soient $n \geq 1$ et $f \in \text{Perm}(n, d)$ avec $1 \leq d \leq n$. Soit $r = \#f^{-1}\{d\}$. Alors $[n] \setminus f^{-1}\{d\}$ est réunion de $r+1$ intervalles, éventuellement vides. La restriction de f à chacun des intervalles non vides définit une fonction surjective sur son image, on associe de plus la fonction $|$ aux intervalles vides, et on note ces fonctions f_0, \dots, f_r . Par hypothèse de récurrence, est associé à chaque fonction f_j un arbre $\psi(f_j)$; on greffe ces $r+1$ arbres sur une corolle à $r+1$ feuilles pour obtenir l'arbre associé à f . Dans la Fig. 1, l'image par ψ de la fonction de gauche est l'arbre du milieu.

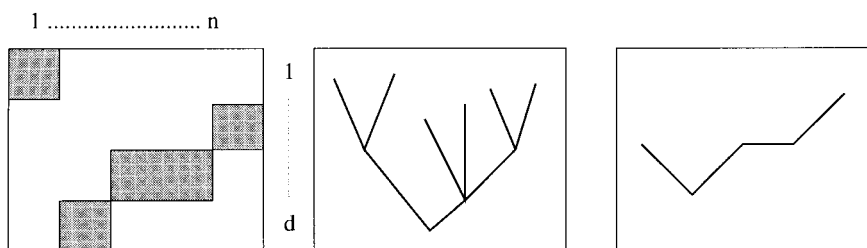


FIG. 1. Exemples.

Soit $t \in \text{Arb}(n)$ un arbre. Notant $Z(t) = \{f \in \text{Perm}(n) \mid \psi(f) = t\}$, on lui associe l'élément $\sum_{f \in Z(t)} f$ de Perm que l'on désigne encore par t , par abus de notation.

Par la suite, on notera $V(t_0, \dots, t_r)$ l'arbre obtenu par greffage de $r+1$ arbres t_0, \dots, t_r sur une corolle à $r+1$ feuilles. Si $t_j \in \text{Arb}(n_j)$, alors $V(t_0, \dots, t_r) \in \text{Arb}(n)$ où $[n] = [n_0] \sqcup [1] \sqcup [n_1] \sqcup \dots \sqcup [1] \sqcup [n_r]$.

LEMME 1. *Soit $t = V(t_0, \dots, t_r) \in \text{Arb}(n)$ comme ci-dessus. Alors, on a*

$$t = \sum_{f \in Z(t)} f = \sum_d \sum_{f_0, \dots, f_r} \sum_{i_0, \dots, i_r} (i_0 f_0) \sqcup \theta_d \sqcup (i_1 f_1) \sqcup \dots \sqcup \theta_d \sqcup (i_r f_r),$$

où $f_j \in Z(t_j)$ est à valeurs dans $[d_j]$ et les $i_j: [d_j] \rightarrow [d-1]$ sont des injections croissantes dont l'union des images recouvre $[d-1]$. Ici θ_d désigne la fonction définie sur $[1]$ qui vaut d .

Preuve. Vu la définition par récurrence de ψ , si $f \in \text{Perm}(n)$, on a $f \in Z(t)$ si et seulement si il existe d, f_0, \dots, f_r et i_0, \dots, i_r vérifiant:

- $f_j \in Z(t_j)$. On note d_j le cardinal de l'image de f_j .
- Les i_j sont des injections croissantes $i_j: [d_j] \rightarrow [d-1]$ dont l'union des images recouvre $[d-1]$.
- On a $f = (i_0 f_0) \sqcup \theta_d \sqcup (i_1 f_1) \sqcup \dots \sqcup \theta_d \sqcup (i_r f_r)$.

On en déduit l'énoncé du lemme.

PROPOSITION 2. (1) *Le sous \mathbb{Z} -module de Perm engendré par les éléments t pour t décrivant les arbres est une sous-algèbre de Hopf graduée notée Arb .*

(2) *Arb hérite de la filtration de Perm et on retrouve sur $\text{Arb}^{\geq 0} / \text{Arb}^{\geq 1}$ la structure d'algèbre de Hopf sur les arbres binaires plans définie par Loday et Ronco dans [1].*

La preuve passe par les deux lemmes suivants. On note $\text{Arb}_{\mathbb{N}}$ le sous-monoïde additif de Arb engendré par les éléments t où t décrit les arbres.

LEMME 2. *Soient t et t' deux arbres. Alors $t * t' \in \text{Arb}_{\mathbb{N}}$.*

Preuve. On va démontrer le lemme par récurrence sur le nombre total N de sommets internes de t et t' . C'est clair si $N \leq 1$. Soient $t = V(t_0, \dots, t_r)$ et $t' = V(t'_0, \dots, t'_s)$. Par hypothèse de récurrence, on peut écrire

$$t_r * t'_s = \sum_{\alpha} t_{\alpha}, \quad t * t'_0 = \sum_{\beta} t_{\beta}, \quad t_r * t'_0 = \sum_{\gamma} t_{\gamma}$$

où les t_α , t_β et t_γ sont des arbres. On a d'abord:

$$t * t' = \sum_{f \in Z(t)} \sum_{g \in Z(t')} \sum_d \sum_{i_f, i_g} i_f f \sqcup i_g g.$$

On décompose cette somme en trois termes selon que la valeur d est atteinte par i_f seulement, par i_g seulement ou par les deux. On va calculer ces trois termes séparément. En utilisant le lemme 1, on peut écrire le premier terme ainsi:

$$\sum_{g \in Z(t')} \sum_d \sum_{df} \sum_{f_0, \dots, f_r} \sum_{i_0, \dots, i_r} \sum_{i_f, i_g} i_f ((i_0 f_0) \sqcup \theta_{d_f} \sqcup (i_1 f_1) \sqcup \dots \sqcup \theta_{d_f} \sqcup (i_r f_r)) \sqcup i_g g,$$

avec $i_f(d_f) = d$ et $i_g[d_g] \subset [d-1]$. On peut effacer i_f et la sommation par rapport à df et on obtient:

$$\sum_{g \in Z(t')} \sum_d \sum_{f_0, \dots, f_r} \sum_{i_0, \dots, i_r} (i_0 f_0) \sqcup \theta_d \sqcup (i_1 f_1) \sqcup \dots \sqcup \theta_d \sqcup (i_r f_r) \sqcup i_g g.$$

On introduit alors une sommation sur $d_\alpha = \#(i_r[d_r] \cup i_g[d_g])$ et sur une injection $i_\alpha: [d_\alpha] \rightarrow [d-1]$. On obtient:

$$\sum_{g \in Z(t')} \sum_d \sum_{d_\alpha} \sum_{f_0, \dots, f_r} \sum_{i_0, \dots, i_{r-1}, i_\alpha} \sum_{i_r, i_g} (i_0 f_0) \sqcup \theta_d \sqcup (i_1 f_1) \sqcup \dots \sqcup \theta_d \sqcup i_\alpha((i_r f_r) \sqcup i_g g).$$

Les sommations sur g , d_α , i_r , i_g et f_r s'appliquent uniquement aux deux termes entre parenthèses à droite de la formule. On voit que cette sommation correspond au produit $t_r * t'$, que l'on remplace donc par une sommation sur α et sur f_α . On obtient:

$$\sum_{\alpha} \sum_{f_\alpha \in Z(t_\alpha)} \sum_d \sum_{f_0, \dots, f_{r-1}} \sum_{i_0, \dots, i_{r-1}, i_\alpha} (i_0 f_0) \sqcup \theta_d \sqcup (i_1 f_1) \sqcup \dots \sqcup \theta_d \sqcup (i_\alpha f_\alpha).$$

On reconnaît la formule pour $\sum_{\alpha} V(t_0, \dots, t_{r-1}, t_\alpha)$. Le second terme se traite exactement de la même façon. Le troisième terme se calcule par des manipulations similaires sur les injections. On trouve:

$$\begin{aligned} t * t' &= \sum_{\alpha} V(t_0, \dots, t_{r-1}, t_\alpha) + \sum_{\beta} V(t_\beta, t'_1, \dots, t'_s) \\ &\quad + \sum_{\gamma} V(t_0, \dots, t_{r-1}, t_\gamma, t'_1, \dots, t'_s), \end{aligned} \quad (5)$$

ce qui termine la démonstration du lemme.

LEMME 3. Soit $t \in \text{Arb}(n)$ un arbre. Alors $\Delta(t) \in \text{Arb}_{\mathbb{N}} \otimes \text{Arb}_{\mathbb{N}}$.

Preuve. Par récurrence sur le nombre N de feuilles de t . C'est clair si $N \leq 1$. Soit donc $t = V(t_0, \dots, t_r)$. Par hypothèse de récurrence, on peut écrire

$$\Delta(t_j) = \sum_{\alpha_j} t_{\alpha_j}^+ \otimes t_{\alpha_j}^-$$

où les $t_{\alpha_j}^+$ et $t_{\alpha_j}^-$ sont des arbres. On a d'abord

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= \sum_{f \in Z(t)} \Delta(f) \\ &= \sum_{f \in Z(t)} f \otimes | + \sum_{f \in Z(t)} \sum_{[d] = [k] \sqcup [l], l \geq 1} f|_{f^{-1}[k]} \otimes f|_{f^{-1}[l]}. \end{aligned}$$

Le premier terme de cette somme est $t \otimes |$. Il reste à calculer le second. On remplace la somme sur f en utilisant le lemme 1. On obtient:

$$\begin{aligned} &\sum_d \sum_{f_0, \dots, f_r} \sum_{i_0, \dots, i_r} \sum_{[d-1] = [k] \sqcup [l-1]} i_0 f_0|_{(i_0 f_0)^{-1}[k]} \sqcup i_1 f_1|_{(i_1 f_1)^{-1}[k]} \\ &\quad \sqcup \dots \sqcup i_r f_r|_{(i_r f_r)^{-1}[k]} \otimes i_0 f_0|_{(i_0 f_0)^{-1}[l-1]} \sqcup \theta_d \\ &\quad \sqcup \dots \sqcup \theta_d \sqcup i_r f_r|_{(i_r f_r)^{-1}[l-1]}. \end{aligned}$$

On remplace la sommation sur d et sur la décomposition $[d-1] = [k] \sqcup [l-1]$ par une sommation sur k et l . Ensuite, on décompose les injections i_j en i_j^+ et i_j^- selon qu'elles aboutissent dans $[k]$ ou $[l-1]$, et on décompose chaque d_j en la partie d_j^+ envoyée dans $[k]$ et la partie d_j^- envoyée dans $[l-1]$. On obtient:

$$\begin{aligned} &\sum_k \sum_{l-1} \sum_{[d_j] = [d_j^+] \sqcup [d_j^-]} \sum_{i_0^+, \dots, i_r^+, i_0^-, \dots, i_r^-} \sum_{f_0, \dots, f_r} i_0^+ f_0|_{f_0^{-1}[d_0^+]} \sqcup i_1^+ f_1|_{f_1^{-1}[d_1^+]} \\ &\quad \sqcup \dots \sqcup i_r^+ f_r|_{f_r^{-1}[d_r^+]} \otimes i_0^- f_0|_{f_0^{-1}[d_0^-]} \sqcup \theta_l \\ &\quad \sqcup \dots \sqcup \theta_l \sqcup i_r^- f_r|_{f_r^{-1}[d_r^-]}. \end{aligned}$$

Pour chaque j , la sommation sur la décomposition $[d_j] = [d_j^+] \sqcup [d_j^-]$ et sur la fonction $f_j \in Z(t_j)$ fait intervenir le coproduit de l'arbre t_j . On peut donc remplacer par une sommation sur α_j et (f_j^+, f_j^-) et obtenir:

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_r} \sum_k \sum_{l-1} \sum_{i_0^+, \dots, i_r^+, i_0^-, \dots, i_r^-} \sum_{f_0^+, \dots, f_r^+, f_0^-, \dots, f_r^-} i_0^+ f_0^+ \sqcup i_1^+ f_1^+ \sqcup \dots \sqcup i_r^+ f_r^+ \\ &\quad \otimes i_0^- f_0^- \sqcup \theta_l \sqcup \dots \sqcup \theta_l \sqcup i_r^- f_r^-. \end{aligned}$$

On reconnait à gauche du produit tensoriel le produit $*$ itéré et à droite le greffage. On obtient donc:

$$A(t) = t \otimes | + \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_r} (t_{\alpha_0}^+ * \dots * t_{\alpha_r}^+) \otimes V(t_{\alpha_0}^-, \dots, t_{\alpha_r}^-). \quad (6)$$

Par le lemme 2, le terme à gauche du produit tensoriel est dans $\text{Arb}_{\mathbb{N}}$, ce qui termine la démonstration du lemme.

En ce qui concerne la seconde assertion de la proposition 2, on vérifie que les arbres t de filtration 0 sont les arbres binaires, qui correspondent aux sommets des permutahédres. Le fait de retrouver l'algèbre de Loday et Ronco résulte de la seconde assertion de la proposition 1 et des résultats de l'article [1].

3. ALGÈBRE DE HOPF DES HYPERCUBES

Pour $n \geq 2$ et $1 \leq d \leq n$, on note $\text{Cub}(n, d)$ l'ensemble des $(n-1)$ -uplets d'éléments de $\{-1, 0, +1\}$ contenant exactement $n-d$ zéros. Pour $n=1$, on définit $\text{Cub}(1, 1)$ comme le singleton $\{(\)\}$. Pour $n \geq 1$, $\text{Cub}(n, d)$ est en bijection avec les faces de dimension $n-d$ de l'hypercube de dimension $n-1$. On convient que $\text{Cub}(0, 0) = \{|\}$. On note $\text{Cub}(n)$ l'union disjointe des ensembles $\text{Cub}(n, d)$ pour n fixé. On appelle montagnes les éléments de l'union disjointe des ensembles $\text{Cub}(n)$. On donne un exemple de représentation graphique d'une montagne dans le dessin de droite de la figure 1, qui illustre le choix de ce nom et où on dessine une descente pour $+1$, un trait horizontal pour 0 et une montée pour -1 .

Soient $c \in \text{Cub}(n)$ et $i \in \{1, \dots, n-1\}$. On note $c(i)$ le contenu de la $i^{\text{ème}}$ case de c .

On a une application surjective $\phi: \text{Perm}(n) \rightarrow \text{Cub}(n)$ définie comme suit: $\phi(|) = |$ et si f est l'unique élément de $\text{Perm}(1, 1)$ alors $\phi(f) = (\)$. Soit $f \in \text{Perm}(n, d)$ avec $n \geq 2$. Le $(n-1)$ -uplet $\phi(f)$ est défini par:

$$\phi(f)(i) = \begin{cases} +1 & \text{si } f(i+1) > f(i), \\ 0 & \text{si } f(i+1) = f(i), \\ -1 & \text{si } f(i+1) < f(i). \end{cases} \quad (7)$$

Dans la Fig. 1, l'image par ϕ de l'élément de $\text{Perm}(n, d)$ placé à gauche est l'élément de $\text{Cub}(n, d)$ représenté à droite.

Soit $c \in \text{Cub}(n)$ une montagne. Notant $W(c) = \{f \in \text{Perm}(n) \mid \phi(f) = c\}$, on lui associe l'élément $\sum_{f \in W(c)} f$ de Perm que l'on désigne encore par c , par abus de notation.

PROPOSITION 3. (1) *Le sous \mathbb{Z} -module de Perm engendré par les éléments c pour c décrivant la réunion des $\text{Cub}(n)$ est une sous-algèbre de Hopf notée Cub . De plus, $\text{Cub} \subset \text{Arb}$.*

(2) *Cub hérite de la filtration de Perm et l'algèbre de Hopf $\text{Cub}^{\geq 0}/\text{Cub}^{\geq 1}$ est l'algèbre de Hopf de Solomon définie par Malvenuto et Reutenauer.*

La preuve passe par les trois lemmes suivants. On note $\text{Cub}_{\mathbb{N}}$ le sous-monoïde additif de Cub engendré par les éléments c où c décrit les montagnes.

LEMME 4. *Soient c et c' deux montagnes. Alors, $c * c' \in \text{Cub}_{\mathbb{N}}$. Plus précisément, si $c \in \text{Cub}(r)$ et $c' \in \text{Cub}(s)$, on a :*

$$c * c' = (c, 1, c') + (c, 0, c') + (c, -1, c'),$$

où chaque terme désigne le $r + s - 1$ -uplet obtenu en juxtaposant dans cet ordre.

Preuve. On a

$$c * c' = \sum_{f \in W(c)} \sum_{g \in W(c')} \sum_d \sum_{i_f, i_g} i_f f \sqcup i_g g.$$

On décompose la sommation sur i_f, i_g en trois termes selon que $i_f(d_f) < i_g(1)$, $i_f(d_f) = i_g(1)$ ou $i_f(d_f) > i_g(1)$. Le premier terme est donc :

$$\sum_{f \in W(c)} \sum_{g \in W(c')} \sum_d \sum_{i_f, i_g} i_f f \sqcup i_g g,$$

où on impose de plus que $i_f(d_f) < i_g(1)$. D'autre part, fixons un entier d . Alors toute fonction $h \in W((c, 1, c'))$ à valeurs dans $[d]$ s'écrit de manière unique $h = i_f f \sqcup i_g g$ avec $f \in W(c)$, $g \in W(c')$, i_f une injection croissante de $[d_f]$ dans $[d]$ et i_g une injection croissante de $[d_g]$ dans $[d]$ telles que l'union des images de i_f et i_g recouvre $[d]$ et $i_f(d_f) < i_g(1)$. On obtient cette décomposition de h en écrivant $h = h|_{[r]} \sqcup h|_{[s]}$. Le premier terme du produit se réécrit donc

$$\sum_d \sum_{h \in W((c, 1, c'))} h,$$

où la seconde somme est restreinte aux applications à valeurs dans $[d]$. Ce terme est donc égal à $(c, 1, c')$. Les deux autres termes se calculent de la même façon. Le lemme est démontré.

Pour montrer que Cub est une sous-cogèbre de Perm, il est utile d'introduire l'ensemble des scissions d'une montagne c , de la façon suivante. On considère d'abord l'ensemble $S(c)$ des applications s de $\{1, \dots, n-1\}$ dans un ensemble à trois éléments $\{+, \pm, -\}$ telles que $s(i) \neq \pm$ si $c(i) = 0$. A une application $s \in S(c)$, on associe deux applications g et d de $\{1, \dots, n-1\}$ dans $\{+, -\}$ de la façon suivante: si $s(i) \neq \pm$ alors $g(i) = d(i) = s(i)$, sinon $g(i) = \text{Sgn}(c(i))$ et $d(i) = -\text{Sgn}(c(i))$ où Sgn est la fonction signe. On pose alors $\text{Sci}(c) = \{s \in S(c) \mid \forall i \in \{1 \dots (n-2)\}, d(i) = g(i+1)\}$.

A une scission s de c , on associe deux familles de montagnes $(c_\alpha^+(s))_\alpha$ et $(c_\beta^-(s))_\beta$ comme suit. On définit d'abord l'ensemble des intervalles associé à s . Soit $m = \#s^{-1}(\pm)$. On note $j_1 < \dots < j_m$ les entiers tels que $s(j_k) = \pm$. On pose de plus $j_0 = 0$ et $j_{m+1} = n$. On définit $m+1$ intervalles ainsi: pour $0 \leq k \leq m$, le $k^{\text{ème}}$ intervalle est l'ensemble des entiers strictement compris entre j_k et j_{k+1} . Certains de ces intervalles peuvent être vides.

On associe ensuite à chacun de ces intervalles un signe, comme suit. Si l'intervalle est non vide, il résulte de la définition de l'ensemble des scissions que la restriction de s à cet intervalle est constante et égale à $+$ ou à $-$; on associe ce signe à l'intervalle. D'autre part, s'il s'agit de l'intervalle vide $]i; i+1[$ pour $0 \leq i \leq n-1$, alors au moins une des deux valeurs $d(i)$ ou $g(i+1)$ est définie et elles coïncident si $1 \leq i \leq n-2$; on associe cette valeur commune à l'intervalle.

On peut alors associer à chaque intervalle une montagne qui est la restriction de c si l'intervalle est non vide et $()$ sinon. On note $(c_\alpha^+(s))_\alpha$ la famille ordonnée de montagnes associée aux intervalles de signe $+$. On note de même $(c_\beta^-(s))_\beta$ la famille ordonnée de montagnes associée aux intervalles de signe $-$. On peut maintenant énoncer le lemme suivant:

LEMME 5. Soit $c \in \text{Cub}(n)$ une montagne. Alors $\Delta(c) \in \text{Cub}_\mathbb{N} \otimes \text{Cub}_\mathbb{N}$. Plus précisément, on a:

$$\Delta(c) = \sum_{\text{Sci}(c)} \prod_{\alpha} c_{\alpha}^{+}(s) \otimes \prod_{\beta} c_{\beta}^{-}(s),$$

où les produits sont pris au sens de $*$.

Preuve. Le coproduit $\Delta(c)$ s'écrit par définition:

$$\sum_{f \in \mathcal{W}(c)} \sum_{[d] = [k] \sqcup [l]} f|_{f^{-1}[k]} \otimes f|_{f^{-1}[l]},$$

où f est à valeurs dans $[d]$. En intervertissant les deux sommations, on peut réécrire:

$$\sum_k \sum_l \sum_{f \in \mathcal{W}(c), f \rightarrow [k] \sqcup [l]} f|_{f^{-1}[k]} \otimes f|_{f^{-1}[l]}. \quad (8)$$

On fixe maintenant k et l . Soit $f \in W(c)$ à valeurs dans $[k] \sqcup [l]$. On associe à f un quintuplet $(s, (f_\alpha^+), (f_\beta^-), (i_\alpha^+), (i_\beta^-))$ où s est une scission de c , $f_\alpha^+ \in W(c_\alpha^+(s))$, $f_\beta^- \in W(c_\beta^-(s))$, i_α^+ est une injection croissante de l'image de f_α^+ dans $[k]$, i_β^- est une injection croissante de l'image de f_β^- dans $[l]$, quels que soient α et β , et les images des injections recouvrent $[k]$ et $[l]$. La scission s est définie comme suit:

- Si $f(i) \in [k]$ et $f(i+1) \in [k]$ alors on pose $s(i) = +$.
- Si $f(i) \in [l]$ et $f(i+1) \in [l]$ alors on pose $s(i) = -$.
- Sinon on pose $s(i) = \pm$.

On vérifie immédiatement que s est bien une scission. Les fonctions f_α^+ , f_β^- et les injections i_α^+ , i_β^- sont définies par les restrictions de f aux intervalles formant $f^{-1}[k]$ et $f^{-1}[l]$. On vérifie que l'on a bien $\phi(f_\alpha^+) = c_\alpha^+(s)$ et $\phi(f_\beta^-) = c_\beta^-(s)$. Réciproquement, on retrouve f à partir de $(s, (f_\alpha^+), (f_\beta^-), (i_\alpha^+), (i_\beta^-))$ en recollant les fonctions $i_\alpha^+ f_\alpha^+$ et $i_\beta^- f_\beta^-$ selon l'ordre total sur les montagnes des deux familles donné par la scission s . Ceci définit une bijection, que l'on utilise pour réécrire la somme (8) sous la forme:

$$\sum_k \sum_l \sum_{s \in \text{Sci}(c)} \sum_{f_\alpha^+, f_\beta^-} \sum_{i_\alpha^+, i_\beta^-} \bigsqcup_\alpha i_\alpha^+ f_\alpha^+ \otimes \bigsqcup_\beta i_\beta^- f_\beta^-.$$

Soit encore

$$\sum_{s \in \text{Sci}(c)} \left(\sum_k \sum_{f_\alpha^+, i_\alpha^+} \bigsqcup_\alpha i_\alpha^+ f_\alpha^+ \otimes \sum_l \sum_{f_\beta^-, i_\beta^-} \bigsqcup_\beta i_\beta^- f_\beta^- \right).$$

On reconnaît les expressions pour le produit $*$ itéré indexé par α à gauche et par β à droite. Par le lemme 4, chacun des ces produits itérés est dans $\text{Cub}_{\mathbb{N}}$. Ceci démontre le lemme 5.

Pour démontrer la proposition 3, il reste à montrer que $\text{Cub} \subset \text{Arb}$. Pour cela, on introduit la notion de type d'une feuille d'un arbre plan. Soit t un arbre ayant au moins un sommet interne et F une feuille de t . Si s est l'unique sommet interne de t relié à F par une arête, on définit $\text{Type}(F)$ en fonction de la position de l'arête a joignant la feuille F au sommet s parmi les arêtes entrantes de s :

$$\begin{cases} \text{Type}(F) = -1 & \text{si } a \text{ est l'arête la plus à gauche,} \\ \text{Type}(F) = +1 & \text{si } a \text{ est l'arête la plus à droite,} \\ \text{Type}(F) = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (9)$$

On peut alors énoncer le lemme suivant:

LEMME 6. Soient $n \geq 2$, $t \in \text{Arb}(n)$ et $f \in Z(t)$. Alors, en notant F_i la $(i+1)^{\text{ème}}$ feuille de t , on a pour tout i entre 1 et $n-1$,

$$\phi(f)(i) = \text{Type}(F_i).$$

Par conséquent, ϕ se factorise à travers ψ , et il en résulte que $\text{Cub} \subset \text{Arb}$.

Preuve. On procède par récurrence sur $n \geq 2$. Pour $n=2$, le résultat est clair. Soient donc $n > 2$ et $t = V(t_0, \dots, t_r)$. Alors d'après la preuve du lemme 1, on peut écrire $f = (i_0 f_0) \sqcup \theta_d \sqcup (i_1 f_1) \sqcup \dots \sqcup \theta_d \sqcup (i_r f_r)$. On distingue deux cas. D'abord, si i et $i+1$ sont dans le $j^{\text{ème}}$ intervalle de $[n] \setminus f^{-1}\{d\}$, on applique l'hypothèse de récurrence à l'arbre t_j et la fonction f_j . Comme le type d'une feuille ne change pas si on greffe l'arbre sur une corolle, on obtient l'égalité voulue. Il reste maintenant à traiter les cas où $f(i) = d$ ou $f(i+1) = d$. En utilisant la définition de l'application ψ par récurrence et la définition de ϕ par la formule (7), on observe que l'on a:

- Si $f(i) < d = f(i+1)$ alors $\text{Type}(F_i) = +1 = \phi(f)(i)$.
- Si $f(i+1) < d = f(i)$ alors $\text{Type}(F_i) = -1 = \phi(f)(i)$.
- Si $f(i) = d = f(i+1)$ alors $\text{Type}(F_i) = 0 = \phi(f)(i)$.

Dans chacun des cas, l'égalité est vraie, ce qui termine la récurrence.

On peut définir une application surjective ξ de $\text{Arb}(n)$ dans $\text{Cub}(n)$ par $\xi(t)(i) = \text{Type}(F_i)$. L'égalité montre que $\phi = \xi \circ \psi$. On a alors, pour tout $c \in \text{Cub}(n)$,

$$c = \sum_{\{t \mid \xi(t) = c\}} t,$$

ce qui montre l'inclusion voulue. Ceci termine la démonstration du lemme 6, et donc de la proposition 3.

RÉFÉRENCES

- 1 J.-L. Loday et M. O. Ronco, Hopf algebra of the planar binary trees, *Adv. in Math.* **139**, No. 2 (1998), 293–309.
- 2 C. Malvenuto et C. Reutenauer, Duality between quasi-symmetric functions and the Solomon descent algebra, *J. Algebra* **177** (1995), 967–982.
- 3 A. Tonks, Relating the associahedron and the permutohedron, in "Operads: Proceedings of Renaissance Conferences, Harford CT/Luminy, 1995," pp. 33–36, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.